

পরিসংখ্যান ক্লাশে সবাইকে স্বাগতম



শিক্ষক পরিচিতিঃ

মোহাম্মদ আবুল হোসেন

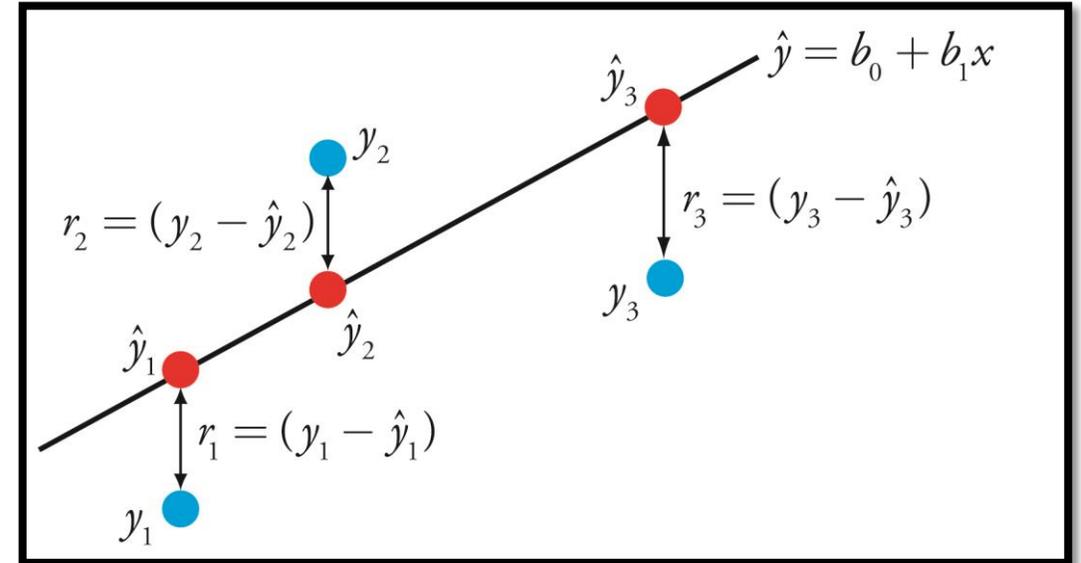
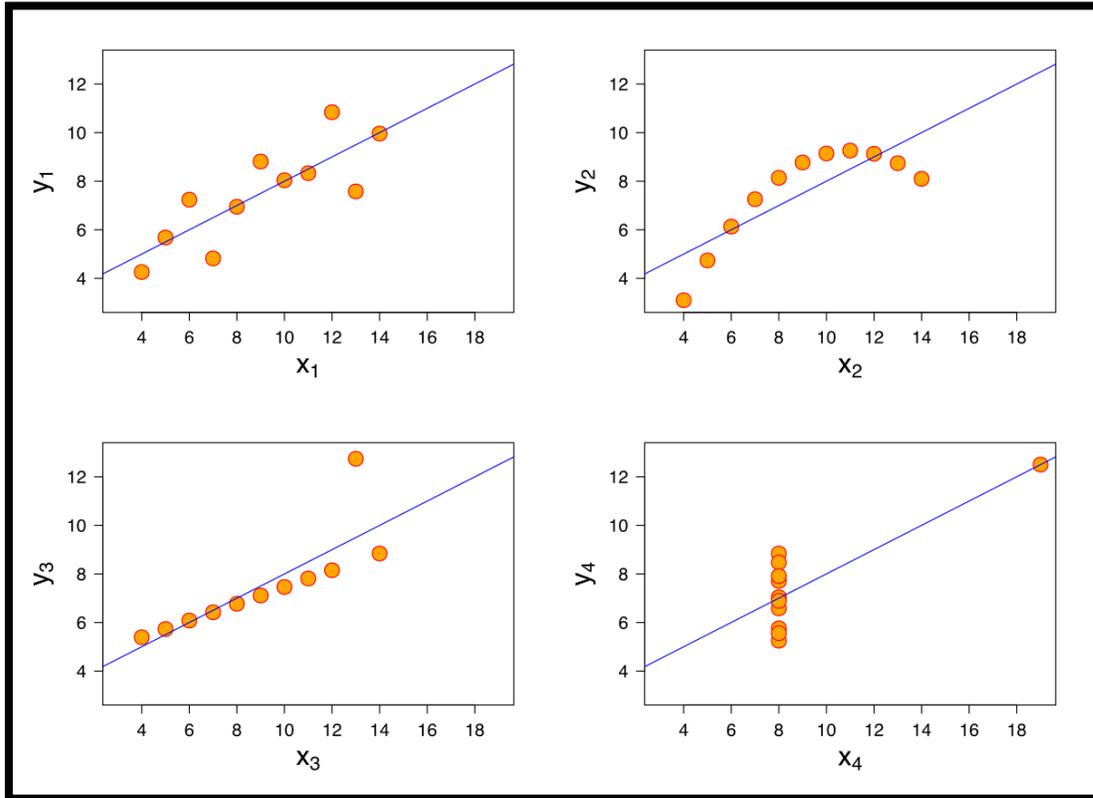
সহকারী অধ্যাপক, পরিসংখ্যান বিভাগ
কুমিল্লা ভিক্টোরিয়া সরকারি কলেজ।

মোবাইলঃ ০১৭১৬৪৯০৭৩৯

ইমেইলঃ mabulhosen1975@gmail.com



তোমরা কি বলতে পারো আজকের আলোচ্য পাঠ কীঃ



আজকের পাঠঃ

সংশ্লেষ

ও

নির্ভরণ

শিখনফলঃ

- ❖ দ্বিচলকবিশিষ্ট তথ্য ও সংশ্লেষের ধারণা বর্ণনা করতে পারবে;
- ❖ সহজ সংশ্লেষ ও এর ধরণ ব্যাখ্যা করতে পারবে;
- ❖ দ্বিচলকবিশিষ্ট তথ্যের সংশ্লেষণ পরিমাপ করতে পারবে;

প্রশ্নঃ- দ্বি-চলক বিশিষ্ট তথ্য কি?

উত্তরঃ- যে তথ্যের প্রতিটি মান দুটি চলকের জোড়া মান দ্বারা গঠিত হয় তাকে দ্বি-চলক বিশিষ্ট তথ্য বলে।

অথবা, পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের সমন্বয়ে গঠিত তথ্যকে দ্বি-চলক বিশিষ্ট তথ্য বলে। দ্বি-চলক বিশিষ্ট তথ্যকে (x,y) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মনে করি, পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দ্বিচলক (x,y) এর n সংখ্যক জোড়া মান সমূহ যথাক্রমে $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \dots \dots \dots, (x_n,y_n)$ কে দ্বি-চলক বিশিষ্ট তথ্য বলে।

উদাহরণঃ- একদল ছাত্রের ওজন ও উচ্চতা পরিমাপক তথ্য হচ্ছে দ্বিচলক তথ্য। অনুরূপভাবে, কোনো দ্রব্যের মূল্য ও চাহিদা, কোনো ব্যক্তির আয় ও ব্যয় ইত্যাদি দ্বিচলক বিশিষ্ট তথ্যের উদাহরণ।

প্রশ্নঃ- সংশ্লেষ বলতে কি বুঝ? সংশ্লেষের প্রকারভেদ আলোচনা কর।

উত্তরঃ- সংশ্লেষঃ একই অনুসন্ধান ক্ষেত্র হতে পরিমাপকৃত দুটি চলকের একটির মানের পরিবর্তনে অপরটির মান পরিবর্তিত হলে পরিসংখ্যানের ভাষায় তাদেরকে সম্পর্কযুক্ত বলা হয়। দুটি চলকের মধ্যে বিদ্যমান এই সম্পর্ককে অর্থাৎ দুটি চলকের একই সাথে পরিবর্তন হওয়ার প্রবণতাকে সংশ্লেষ বা সহসম্বন্ধ বলে।

উদাহরণঃ একদল শিক্ষার্থীর উচ্চতা ও ওজনের মধ্যে সংশ্লেষ বিদ্যমান। কারণ উচ্চতা বৃদ্ধির সাথে সাথে ওজন বৃদ্ধি পায়।

প্রশ্নঃ- সংশ্লেষ বলতে কি বুঝ? সংশ্লেষের প্রকারভেদ আলোচনা কর।

উত্তরঃ- সংশ্লেষঃ একই অনুসন্ধান ক্ষেত্র হতে পরিমাপকৃত দুটি চলকের একটির মানের পরিবর্তনে অপরটির মান পরিবর্তিত হলে পরিসংখ্যানের ভাষায় তাদেরকে সম্পর্কযুক্ত বলা হয়। দুটি চলকের মধ্যে বিদ্যমান এই সম্পর্ককে অর্থাৎ দুটি চলকের একই সাথে পরিবর্তন হওয়ার প্রবনতাকে সংশ্লেষ বা সহসম্বন্ধ বলে।

উদাহরণঃ একদল শিক্ষার্থীর উচ্চতা ও ওজনের মধ্যে সংশ্লেষ বিদ্যমান। কারণ উচ্চতা বৃদ্ধির সাথে সাথে ওজন বৃদ্ধি পায়।

সংশ্লেষের প্রকারভেদঃ

সংশ্লেষকে সাধারণত তিনভাবে ভাগ করা যায়। যথাঃ-

১। সহজ সংশ্লেষ (Simple Correlation)

২। আংশিক সংশ্লেষ (Partial Correlation)

৩। বহুধা সংশ্লেষ (Multiple Correlation).

সহজ সংশ্লেষ (Simple Correlation): পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে একটি চলকের মানের পরিবর্তনের ফলে যদি অন্য চলকের মানের সমমুখী এ বিপরীতমুখী পরিবর্তন ঘটে, তাদের মধ্যকার সম্পর্ককে সহজ সংশ্লেষ বা সরল সংশ্লেষ বলে।

উদাহরণঃ একদল শিক্ষার্থীর উচ্চতা ও ওজনের মধ্যে সহজ সংশ্লেষ বিদ্যমান। কারণ উচ্চতা বৃদ্ধির সাথে সাথে ওজন বৃদ্ধি পায়।

সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কের প্রকৃতি এবং মাত্রার উপর ভিত্তি করে সহজ সংশ্লেষকে পাঁচভাবে ভাগ করা যায়। যথাঃ-

পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষ (Perfect Positive Correlation)

(ii) আংশিক ধনাত্মক সংশ্লেষ (Partial Positive Correlation)

(iii) পূর্ণ ঋনাত্মক সংশ্লেষ (Perfect Negative Correlation)

(iv) আংশিক ঋনাত্মক সংশ্লেষ (Partial Negative Correlation)

(v) শূন্য সংশ্লেষ (Zero Correlation)।

(i) পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষ (Perfect Positive Correlation):

পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে যদি সমান ও সমমুখী পরিবর্তন ঘটে অর্থাৎ একটি চলকের মান যে হারে বাড়ে (বা কমে) অন্য চলকের মানও একই হারে বাড়ে (বা কমে) তবে তাদের মধ্যকার সংশ্লেষকে পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

গাণিতিক উদাহরণঃ-

আয়(হাজারে): x	১০	১৫	২০	২৫	৩০	৩৫	৪০
ব্যয়(হাজারে): y	৮	১২	১৬	২০	২৪	২৮	৩২

এখানে, আয়(x) বৃদ্ধির সাথে সাথে ব্যয়(y) বৃদ্ধি পেয়েছে এবং আয় ও ব্যয়ের পরিবর্তনের (বৃদ্ধির) অনুপাত সমান। সুতরাং আয় ও ব্যয়ের মধ্যকার সম্পর্ককে পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

আংশিক ধনাত্মক সংশ্লেষ (Partial Positive Correlation):

পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে যদি সমমুখী পরিবর্তন ঘটে কিন্তু উভয় চলকের মানগুলি সমান হারে বাড়ে না বা কমে না তবে এ ধরনের সংশ্লেষকে আংশিক ধনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

গাণিতিক উদাহরণঃ-

সার প্রয়োগ(কেজিতে): x	৫	১০	১৬	২০	২৮	৩০
উৎপাদন(মন): y	৬০	৭৫	৮৫	৯০	৯২	৯৫

এখানে, সার প্রয়োগ(x) বৃদ্ধির সাথে সাথে উৎপাদন(y) বৃদ্ধি পেয়েছে এবং সার প্রয়োগ ও উৎপাদনের পরিবর্তনের(বৃদ্ধির) অনুপাত সমান নয়। সুতরাং সার প্রয়োগ ও উৎপাদনের মধ্যকার সম্পর্ককে আংশিক ধনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

(iii) পূর্ণ ঋনাত্মক সংশ্লেষ (Perfect Negative Correlation):

পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে যদি সমান ও বিপরীতমুখী পরিবর্তন ঘটে অর্থাৎ একটি চলকের মান যে হারে বাড়ে (বা কমে) অন্য চলকের মানও একই হারে কমে (বা বাড়ে) তবে তাদের মধ্যকার সংশ্লেষকে পূর্ণ ঋনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

উদাহরণঃ-

ঔষধের মাত্রাঃ x	১০	১৫	২০	২৫	৩০	৩৫
জীবানুর সংখ্যাঃ y	৬০	৫০	৪০	৩০	২০	১০

এখানে, ঔষধের মাত্রা(x) বৃদ্ধির সাথে সাথে জীবানুর সংখ্যা(y) হ্রাস পেয়েছে এবং ঔষধের মাত্রা ও জীবানুর সংখ্যা পরিবর্তনের অনুপাত সমান। সুতরাং ঔষধের মাত্রা ও জীবানুর সংখ্যার মধ্যকার সম্পর্ককে পূর্ণ ঋনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

(iv) আংশিক ঋনাত্মক সংশ্লেষ (Partial Negative Correlation):

পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে যদি বিপরীতমুখী পরিবর্তন ঘটে কিন্তু উভয় চলকে পরিবর্তনের হার সমান নয় অর্থাৎ একটি চলকের মান যে হারে বাড়ে (বা কমে) অন্য চলকটির মান একই হারে কমে না (বা বাড়ে না) তবে তাদের মধ্যকার সংশ্লেষকে আংশিক ঋনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

উদাহরণঃ-

মূল্য (টাকায়): x	৬০	৬৫	৭৫	৯০	১০০
চাহিদা (কেজিতে): y	২০	১৮	১৪	৮	৬

এখানে, মূল্য (x) বৃদ্ধির সাথে সাথে চাহিদা (y) হ্রাস পেয়েছে এবং মূল্য ও চাহিদার পরিবর্তনের (ব্ররদ্ধি ও হ্রাসের) অনুপাত সমান নয়। সুতরাং মূল্য ও চাহিদার মধ্যকার সম্পর্ককে আংশিক ঋনাত্মক সংশ্লেষ বলে।

(v) শূন্য সংশ্লেষ (Zero Correlation):

যদি দুটি চলকের মধ্যে কোনো একটি চলকের মান পরিবর্তিত হলে অপর চলকটির মান অপরিবর্তিত থাকে, তবে তাদের মধ্যকার সংশ্লেষকে শূন্য সংশ্লেষ বলে।

উদাহরণঃ-

লবণের মূল্য (টাকায়): x	৪০	৩৫	৩০	২৫	২০
লবণের ব্যবহার (কেজিতে): y	৫	৫	৫	৫	৫

এখানে, লবণের মূল্য (x) হ্রাসের ফলেও লবণের ব্যবহার (y) অপরিবর্তিত রয়েছে। সুতরাং লবণের মূল্য ও লবণের ব্যবহারের মধ্যকার সম্পর্ককে শূন্য সংশ্লেষ বলে।

প্রশ্নঃ- সহভেদাঙ্ক ও সংশ্লেষাঙ্ক কি? সংশ্লেষাঙ্কের বৈশিষ্ট্যগুলি লিখ।

উত্তরঃ- সহভেদাঙ্ক(Covariance): পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুইটি চলকের প্রতিটি মান হতে তাদের নিজ নিজ গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের গুণফলের সমষ্টিকে চলকের পদসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে সহভেদাঙ্ক বলে।

গাণিতিক সূত্রঃ- মনে করি, পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর n সংখ্যক জোড়া মানসমূহ যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ যাদের গাণিতিক গড় যথাক্রমে \bar{x} ও \bar{y} ।

সুতরাং, সহভেদাঙ্ক, $Cov(x,y) = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$ ।

সহভেদাঙ্কের মান ধনাত্মক বা ঋনাত্মক উভয়ই হতে পারে। কিন্তু চলকদ্বয় সম্পর্কহীন বা স্বাধীন হলে তাদের মধ্যকার সহভেদাঙ্ক শূন্য হয়। অর্থাৎ, দুটি স্বাধীন চলকের সহভেদাঙ্ক, $Cov(x,y)=0$ ।

সংশ্লেষাঙ্ক (Coefficient of correlation):- যে সংখ্যাাত্মক পরিমাপের সাহায্যে পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুইটি চলকের পরিবর্তনের প্রকৃতি এবং তাদের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কের মাত্রা পরিমাপ করা হয় তাকে সংশ্লেষাঙ্ক বলে।

মনে করি, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলক x ও y এর n সংখ্যক জোড়া মানসমূহ যাদের গাণিতিক গড় যথাক্রমে \bar{x} ও \bar{y} । চলকদ্বয়ের সংশ্লেষাঙ্ক r হলে,

কার্ল পিয়ারসনের সূত্রানুসারে সংশ্লেষাঙ্ক, $r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}}$ (তাত্ত্বিক সূত্র)।

$$r = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sqrt{\left\{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right\}\left\{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right\}}} \quad (\text{গনণার সূত্র}) ।$$

অন্যভাবে, সংশ্লেষণাংক, $r = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$; যেখানে, সহভেদাঙ্ক, $\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$,

$$\text{চলক } x \text{ এর পরিমিত ব্যবধান, } \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} \quad \text{এবং চলক } y \text{ এর পরিমিত ব্যবধান, } \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}} ।$$

সংশ্লেষণাংকের বৈশিষ্ট্য বা ধর্মাবলীঃ-

(ক) সংশ্লেষণাংক একটি এককবিহীন বিশুদ্ধ সংখ্যা।

(খ) সংশ্লেষণাংকের মান -1 হতে $+1$ এর মধ্যে থাকে। অর্থাৎ, $-1 \leq r \leq 1$ ।

(গ) সংশ্লেষণাংক মূল ও মাপনী হতে স্বাধীন।

(ঘ) সংশ্লেষণাংকের মান চলক নিরপেক্ষ। অর্থাৎ, $r_{xy} = r_{yx}$ ।

(ঙ) দুটি চলকের সংশ্লেষণাংক উহাদের নির্ভরাংকদ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান। অর্থাৎ, $r = \sqrt{b_{yx}b_{xy}}$.

(চ) দুটি স্বাধীন চলকের সংশ্লেষণাংকের মান শূন্য। অর্থাৎ, x ও y দুটি স্বাধীন চলক হলে, $r_{xy} = 0$ । কিন্তু $r_{xy} = 0$ হলে, x ও y স্বাধীন নাও হতে পারে।

(ছ) দুটি চলকের সংশ্লেষণাংক উহাদের নির্ভরাংকদ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান। অর্থাৎ, $\frac{b_{yx}+b_{xy}}{2} \geq r$.

(জ) দুটি চলকের মধ্যে পূর্ণ রৈখিক সম্পর্ক থাকলে r এর মান ± 1 হয়।

(ঝ) দুটি সম্পর্কহীন চলকের সংশ্লেষণাংকের মান শূন্য হবে।

বাড়ির কাজ

প্রশ্নঃ- ১:- একটি মোবাইল কোম্পানী নতুন মডেলের একটি মোবাইলকে জনপ্রিয় করতে বিভিন্ন জেলার জন্য পৃথক পৃথক বিজ্ঞাপন ব্যয় নির্ধারণ করে এবং বিক্রির পরিমাণ কাল্পনিক লক্ষ্যে পৌঁছেছে কি না সেজন্য বিভিন্ন সময়ে তথ্য সংগ্রহ করে নিম্নের তথ্যটি পায়ঃ-

বিজ্ঞাপন ব্যয়-x (লক্ষ টাকা)	১৩	২৫	৫০	৩৫	১৬	১০
বিক্রির সংখ্যা-y (হাজার টাকা)	১০	২০	৩০	২৫	১২	৭

(ক) সংশ্লেষ কী?

(খ) বিক্রয় ও বিজ্ঞাপনের মধ্যে কি ধরনের সম্পর্ক? ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপক হতে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ঘ) উদ্দীপকের তথ্য হতে বিজ্ঞাপন ব্যয় ও বিক্রির সংখ্যার মধ্যে বিক্ষিপ্ত চিত্র অংকন করে এর প্রকৃতি সম্পর্কে মতামত দাও।

সবাইকে ধন্যবাদ

আমরা সবাই বাড়িতে থাকি, নিজে সুস্থ থাকি
ও অন্যকে সুস্থ থাকতে সহযোগীতা করি।